量子場の変形理論について

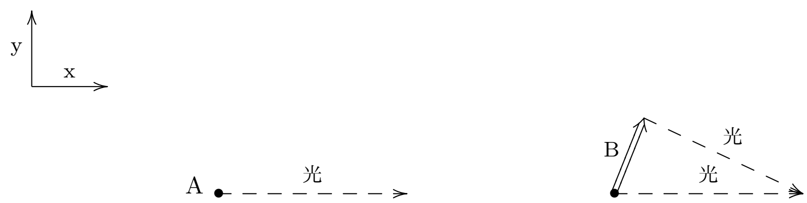
森田 知真

Abstract. この小論は, [Mo1-4] において得られた考えを総括して得られたものである．特に, [Mo2] において得られた $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の変形理論の類似を量子場の理論に求め, その物理的な意味合いを探ろうというのが本稿の目的である.

1. 相対性理論について

静止した地面に物体 A が置かれており, その地面に対して一定の速さ V で移動している物体を B としよう．このとき, 特殊相対性理論により, 物体 A からは物体 B 自体が感じている時間経過よりも物体 B での時間が遅く流れているように見える．このことは物体 A, B の有無に関係なく, 地面に静止した慣性系と物体 B とともに動く慣性系の間のローレンツ変換によるものであると考えられている. しかし, ここでは, 仮想的に物体 A と物体 B が伝達子を交換しあうことによって, 時間の流れが調整されていると考えよう．つまり, 速さ V が 0 のときは物体 A と物体 B は同じ時間を共有し, 一方で, 速さ V が光速のときは, 物体 A から見て物体 B では時間が流れていないと感じるとするのである.

次に上の図のような状況を考えよう．地面に静止した物体 A から出た光も, 地面に対して速度 V で移動している物体 B から出た光も, 地面に静止した観測者からすれば, ともに光速度 c で進んでいるように見え, 速度 (ベクトル) の合成に関する公式が成立しない．[Mo3] において, 速度 (ベクトル) の合成に関する公式が成立するような仮想的な空間を数学的に設定した.



地面に静止した観測者は x 座標だけの様子を観測することになり, 目に見えない数学的仮想の世界が広がっているとして, 速度 (ベクトル) の合成を計算しているのである．物体 B がいかなる速度 V で移動しても, 地面に静止した観測者からは物体 B から出た光は常に光速度 c で進んでいるように見え, 当然のことながら, 物体 B の速度が速ければ速いほど, それだけの運動量が y 座標の方向に消滅して, 物体 A からの観測には寄与しなくなる．つまり, 上で仮想的に導入した時間調整

Date: April 24, 2019.
Key words and phrases. 相対性理論, 量子場の理論, 弦理論.

の伝達子は運動量を調整している伝達子として考えても同じである. このように, 仮想的に導入したこの伝達子は地面に静止した物体 A からの時空の歪みを伝えているとみなすことができ, 量子場の変形で重要な役目を果たすことになる.

2. 量子場の変形理論について

2.1. 保型性と波動性. 整数論において, 各素数ごとに世界が拡がっているように, 物理においては, さまざまな運動量で動いている慣性系ごとに各々の世界が拡がっていると [Mo3] で述べた. さらには [Mo4] で, その理論を深化させて, 運動量が量子化された状況のときに, 整数論で得られている類似を物理で求めた. これは整数論における保型性という考えと物理における波動性という考えに類似性が見られると思われたからである.

2.2. 保型形式について. 量子場の変形を考える前に, [Mo2] で得られた $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の変形理論について簡単に復習しておこう. $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して, その正則微分形式 $f(z)$ は上半空間 $\mathbb{H}$ 上定義され, modular 群と呼ばれるものに対して不変性を持ち, 保型形式と呼ばれる. また, 著しい性質として, この保型形式を $q = e^{2\pi i z}$ $(z \in \mathbb{H})$ に関してフーリエ展開したとき

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \quad (a_n(f) \in \mathbb{C})$$

は有限個を除いた各素数 p に対して, $a_p = 1 + p - \sharp E(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ が成立し, 保型形式のフーリエ係数は楕円曲線 E の $\bmod p$ での世界についての情報を含んでいる. なお, n が合成数のとき, a_n は $\{a_p\}_{p:\text{素数}}$ たちから決定される. 一方で, 各係数は, 大域的な $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E から定まるので, 勝手な振る舞いができない. 実際に, ほとんどすべてのフーリエ係数が一致すれば, 保型形式が決まってしまうということが知られている. これが整数論における保型性である. なお, [Mo2] においては, 各フーリエ係数 a_p を連続に動かしたときに, 楕円曲線上の有理点がどのように振る舞うかについて考察を与えた.

2.3. 場の演算子の変形. 量子場の理論で得られる場の演算子も運動量展開したときには, 波動性によって, 各係数は勝手な振る舞いをすることはできない. 本稿での目的は, [Mo2] と同じように, 敢えて運動量ごとの展開係数を自由に動かし, どのような理論が得られるのかを考えることである. 具体的には, まずは, ある波動関数を量子化して場の演算子 $\phi(x,t)$ が得られたとし, それを運動量 $\mathbf{p}$ を持つ粒子の消滅・生成作用素 $a_{\mathbf{p}}$ と $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ でフーリエ展開する. 次に, その展開係数を連続的に動かすということを考える. もはや, 波動関数に由来する規則性などは全くない状態である.

2.4. 数学的解釈. 整数論において, 各素数ごとに世界が拡がっているように, 物理においては, さまざまな運動量で動いている慣性系ごとに各々の世界が拡がっていると解釈できると述べた. このことを踏まえて, 1 つの運動量 $\mathbf{p}$ に着目し, 場の演算子 $\phi(x,t)$ の運動量展開における $a_{\mathbf{p}}$ と $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ の係数を連続変形したものを $\phi'(x,t)$ としよう. 静止した地面に物体 A が置かれているとし, そこから仮想的な場の揺

らぎ $\phi'(x,t)$ に向けて, 前章で導入した伝達子が放たれているとみなそう. このとき, 伝達子は運動量 $\mathbf{p}$ における世界の状態が変化していることを感知することになる. あるいは, 逆に, 波動性が全く崩れた新たな時空が伝達子によって作られたとみなすことができる.

3. いくつかのコメント

3.1. 数学的な技法として. 波動性を有する場の演算子を厳密に取り扱うことは難しいが, 上のように波動性が連続性によって崩れた新しい時空を考えれば, いままでに得られている手法を自然に拡張することができ, 新たな数学的な手法として期待できる. これは, [Mo2] において, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線という離散的な対象を位相幾何学的に連続的に取り扱った手法との類似に相当する. また, 1 章で導入した仮想的伝達子をファインマン図式に盛り込めば, 時空の変化具合を視覚化することもできるであろう.

3.2. 弦理論における解釈. 弦理論における時空の次元は 10 次元とも 26 次元とも言われ, 我々が時空を 4 次元だと感じているのは, 4 次元よりも大きな次元はコンパクト化という操作によって, 内部空間に小さく丸め込まれていることによると言われている. まずは, 弦たちが量子場の理論に従って, この内部空間のまわりを波動性を持って, 運動しているとする. このとき, 前章のように, 各運動量 $\mathbf{p}$ ごとの世界を連続変形させて, 波動性が崩れた新たな時空を設定しよう. すると, 変形された場の演算子が表す弦の状態は内部空間の内外にまたがって存在しているものとしてみなすことができるだろう.

3.3. 弦の内部構造について. 弦理論によると, すべての物質は, 点ではなく弦から構成されていると理解されている. では, 弦のさらなる内部構造はどのようになっているのかということが問題になる. これを各運動量 $\mathbf{p}$ ごとの世界を連続変形させて得られた新たな時空を使って, 解釈することを考えてみよう. 弦とそれを連続に変化させた弦との差を考えると, その差は二つの弦を再び近づけたときに, 極限として点になり, これを弦の内部構造と思うのである. この内部構造としての極限点は我々の時空では感知することはできない. しかし, 上記のような新たな時空を設定してはじめて, 時空の歪みを伝える仮想的伝達子によって感知されるものとみなすことができるであろう. あるいは, 仮想的伝達子によって, 新たな時空が作られ, その結果として内部構造が存在できると考えてもよいであろう.

4. 最後に

はじめに述べたように, [Mo2] において得られた $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の変形理論の類似を量子場の理論に求め, その物理的な意味合いを探ろうというのが本稿の目的であった. 結果として, それらの変形は仮想的伝達子による新たな時空であると数学的に解釈することになった.

References

[Mo1] Morita, K.: *Generalization of the theory of mixed Hodge structures and its application.*
[Mo2] Morita, K.: *On the topological aspects of arithmetic elliptic curves.*
[Mo3] Morita, K.: *On the mathematical interpretations of quantum field theory.* (In Japanese)
[Mo4] Morita, K.: *On the arithmetic interpretations of Casimir energy.* (In Japanese)

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan

Email address: morita@math.sci.hokudai.ac.jp