場の量子論の数学的解釈について

森田 知真

Abstract. シュレディンガー方程式の解である波動関数を量子化して得られる場の演算子を運動量展開し, 特殊相対性理論を用いることで粒子描像に独自の数学的解釈を与えたい. また, それから導かれる帰結から, 時間についての新たな概念を導入したい.

1. はじめに

この小冊子は, わたしの数学の研究 ([Mo1], [Mo2]) において得られた洞察を物理学においても適用できないかと思い立ち, 学部程度の事柄を独学し, まとめたものである.

2. 特殊相対性理論について

2.1. 台車の例. 静止した地面 (慣性系 S) に対して, 一定の速さ V で移動している台車 (慣性系 S') を考える. なお, この台車の台 AB は S' の運動方向と平行になっており, AB の中点 O には光源が据え付けられているとする. そして, 光源 O から出た光がどのように観測されるかを考えたい. 台車に乗り, 慣性系 S' において, この実験を観測している者にとっては, 当然のごとく, 点 A と点 B に光が同時に到着する様子が目撃される. 一方で, S に静止している観測者は光速度不変の原理により, 光が点 B よりも先に, 点 A に到着する様子を目撃することになるであろう.

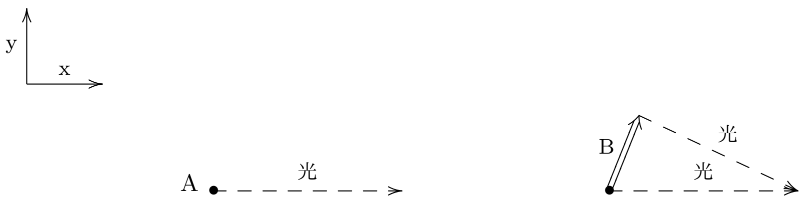
この台車の例からも分かるように, 観測者ごとに全く異なった世界が広がっている. しかし, この光源 O から光を発光させるという行為は紛れもなく, たった一つの事象であり, むしろ, 光源 O に対する各観測者 (慣性系) の存在によって, それぞれの世界が広がっていると考えるのが自然であろう. ここでは, これらの世界どうしがどのように関係しあっているかを考えてみたい.

2.2. 光速度不変の原理. 上の台車の実験において述べたように, 観測者ごとに異なった世界が目に映るのは, 光速度不変の原理によるものである.

上の図のように, 地面に静止した点 A から出た光も, 地面に対して速度 V で移動している点 B から出た光も, 地面に静止した観測者からすれば, ともに光速度 c

Date: April 24, 2019.
Key words and phrases. 光速度不変の原理, 不確定性原理, 場の量子論 .

で進んでいるように見え, 速度 (ベクトル) の合成に関する公式が成立しない. これを光の性質と決め込むのも一つの考えかもしれないが, 次のように, 速度 (ベクトル) の合成に関する公式が成立するような仮想的な空間を数学的に設定したい.



つまり, ここで, 地面に静止した観測者は x 座標だけの様子を観測することになり, 目に見えない数学的仮想の世界が広がっているとして, 速度 (ベクトル) の合成を計算しているのである. 点 B がいかなる速度 V で移動しても, 地面に静止した観測者からは点 B から出た光は常に光速度 c で進んでいるように見え, 当然のことながら, 点 B の速度が速ければ速いほど, それだけの速度が y 座標の方向に消滅して, 点 A からの観測には寄与しなくなるといえる.

3. 量子力学について

3.1. 波動関数と確率解釈. 電子などの微小粒子の動きは確率的にしか捉えられないとされており, その確率的振る舞いを記述するのが, シュレディンガー方程式を満たす波動関数である. ここでは, この波動関数を (第二) 量子化して得られる場の演算子を運動量展開し, 前章の特殊相対性理論における議論と併せることで, 電子の粒子描像に独自の数学的解釈を与えることを目的とする.

3.2. 場の量子化と運動量展開. 以下, 外力に束縛されない 1 次元空間での自由電子を考えることにする. 電子の質量を m とし, プランク定数 h に対して $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とおき, t で時間座標, x で位置座標を表すものとする. このとき, この自由電子の波動関数 $\Psi(x,t)$ はシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

を満たすことになる. そして, この波動関数 $\Psi(x,t)$ から正準量子化の手続きを経て, 場の演算子 $\phi(x,t)$ を得ることができる. このとき, 場の演算子 $\phi(x,t)$ は位置 x, 時刻 t にある 1 粒子を消滅させ, 一方で, そのエルミート演算子 $\phi^\dagger(x,t)$ は位置 x, 時刻 t に 1 粒子を生成することが分かる. この $\phi(x,t)$ をフーリエ展開すると

$$(*) \qquad \phi(x,t) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\exp[i(-\omega_{\mathbf{p}}t + \mathbf{p}x)]a_{\mathbf{p}}$$

が得られる. 但し, $\hbar\omega_{\mathbf{p}} = \frac{\hbar^2\mathbf{p}^2}{2m}$ は運動量 $\hbar\mathbf{p}$ の自由電子のエネルギーを表していることになる. このとき, 演算子 $a_{\mathbf{p}}$ と $a_{\mathbf{q}}^\dagger$ は反交換関係 $\{a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger\} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ を満たし, $a_{\mathbf{p}}$ と $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ はそれぞれ運動量 $\hbar\mathbf{p}$ の 1 粒子の消滅・生成演算子になっていることが分かる. よって, 上のフーリエ展開はこれらの演算子による運動量展開になっている.

上で述べたように ϕ, $\phi^\dagger$ は 1 粒子の消滅・生成を司っており, また, 一方で, 2.1 で述べたように, この自由電子からさまざまな速度 (運動量) で動いている慣性系ごとに各々の世界が広がっている. この二つのことを考え併せると, 上の運動量展開 $(*)$ はこの各々の世界からの寄与を足し合わせて, 1 粒子の消滅・生成が行われていると数学的には解釈できる. また, 2.2 における点 A を自由電子, 点 B を観測者 (慣性系) と考えると, 慣性系の持つ運動量が大きければ大きいほど, それだけの運動量 (点 A から観測して) が, 消滅することになるが, 運動量展開 $(*)$ を見れば, それだけ消滅作用素 $\phi(x,t)$ への寄与が大きくなっていると解釈することができる.

4. いくつかのコメント

4.1. **不確定性原理について.** 電子などの微小粒子の位置と運動量とを同時に決定することは不可能だとされている. しかし, 3.2 における数学的解釈によって, 微小粒子からさまざまな運動量で動いている慣性系ごとに各々の世界が存在し, これらの確定的な (微小粒子の位置と運動量とを同時に決定できる) 世界からの寄与を足し合わせて, 波動として 1 粒子を形成していると考えてもよいだろう. そして, この波動としての 1 粒子が現実の世界において観測される粒子像は確率でしか記述できないと見なすことができる.

4.2. **波動関数の変形について.** 重み 2 の新保型形式の q-展開には, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を各素数 p で割った剰余の世界 $\mathbb{F}_p$ で考えたときの情報が含まれている. 各素数 p に対して, この q-展開の q^p の係数 a_p はこの情報を反映しており, これらの各 a_p を変形する研究を行った ([Mo2]). ここでは, 保型形式と波動関数の類似を辿ることで, 波動関数の変形を考え, それに考察を与えたい.

前章で述べたように, 微小粒子からさまざまな運動量 $\hbar\mathbf{p}$ で動いている慣性系ごとに各々の世界が広がっていると解釈でき, これは保型形式において各素数 p ごとに世界が広がっていることの類似と捉えられる. よって, ここでは, 波動関数から得られた場の演算子を運動量展開し, $a_{\mathbf{p}}$ の係数を変形することを考えたい.

楕円曲線に付随する保型形式の変形において考察したことから ([Mo2]), 二つの同じ種類の微小粒子の状態が二つの波動関数 f と g で表せられているときに, f をエネルギーを変えずに g に連続に変形できたなら, この二つの粒子はどのような関係で結ばれているといえるのかという問題が提起される. 微小粒子からさまざまな運動量 $\hbar\mathbf{p}$ で動いている慣性系ごとに各々の世界が広がっており, これは各世界ごとに各時間が流れていると考えることができる. そのように考えると f と g でその状態を表せられる二つの微小粒子は, 実は無限にある時間次元における一つの微小粒子の異なる時刻における姿が現実の世界で観測されたものであると数学的には解釈することができる. これは量子力学における原則の一つである同種粒子の識別不可能性の数学的説明と考えることができるであろう.

References

[Mo1] Morita, K.:*Generalization of the theory of mixed Hodge structures and its application.*

[Mo2] Morita, K.:*On the topological aspects of arithmetic elliptic curves.*

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan

Email address: morita@math.sci.hokudai.ac.jp