

スピンについての考察

森田 知真

Abstract. 物質・力・空間を結びつけているとされているスピンの性質は基本的なことに対しても未だに解明されていないことが多い。この小論では、素朴な観点に立ち、スピンに対する考察を与えたい。

1. 統計性

スピン量子数はボース・アインシュタイン統計に従うボゾン粒子とフェルミ統計に従うフェルミ粒子によって大別される。すなわち、複数の粒子が同一の量子状態を占めることができるのが、ボゾン粒子であり、二つ以上の粒子が同一の量子状態を占めることができないのがフェルミ粒子である。1粒子状態のフェルミ粒子はいわゆる物質を表し、ゲージ原理によって、その物質間の力を仲介するのがボゾン粒子だとされている。

そもそも原始宇宙において、物質と反物質が同程度に存在した頃には、すぐに対消滅を起こし、どちらが物質でどちらが力を表しているかというのは定め難いことではある。ファインマン・ダイアグラムの形式で例えて言えば、キャッチボールをする人たちがフェルミ粒子であり、そのボールがボゾン粒子であり、キャッチボールをする方かボールのどちらかが力を仲介していると同定することはできない。この節では、どちらが物質でどちらが力かということは度外視して、ボース・アインシュタイン統計とフェルミ統計の二つしかないと仮定した上で、どの組み合わせが最適なのかを考える。

上の例えで言うと、キャッチボールをする方を A, ボールを B と表すと

$(A, B) = (\text{フェルミ粒子}, \text{フェルミ粒子}), (\text{ボゾン粒子}, \text{フェルミ粒子}),$

$(\text{ボゾン粒子}, \text{ボゾン粒子}), (\text{フェルミ粒子}, \text{ボゾン粒子})$

の四つの組み合わせが考えられる。

(i) $(A, B) = (\text{フェルミ粒子}, \text{フェルミ粒子})$ のとき

B がフェルミ粒子であり、系の中で A の間にあてはまる粒子がただ一つしかないことになり、ほとんど相互作用が起こることはなく、実際の状況には適していない。

(ii) $(A, B) = (\text{ボゾン粒子}, \text{フェルミ粒子})$ のとき

これも (i) と同様の理由で実際の状況には適していない。

Date: February 8, 2023.

Key words and phrases. スピン, 統計性, 相対性理論.

(iii) (A, B)=(ボゾン粒子, ボゾン粒子) のとき

系の中で A と B の組み合わせを満たすボゾン粒子が大量にあることになり, (i), (ii) の状況とは真逆で連鎖的に相互作用が起こることになり, 実際の状況には適していない.

(iv) (A, B)=(フェルミ粒子, ボゾン粒子) のとき

B がボゾン粒子であり, 系の中で A の間にあてはまる粒子が大量にあるが, A にあてはまるフェルミ粒子はほとんどないので, 相互作用がほとんど起こらないということも, 連鎖的に起こるといってもなく, 残された可能性としてはもっとも現実的な組み合わせである. また, 近接した A である二つのフェルミ粒子の関係から言うと同一の量子状態を好まないというパウリの排他律もこの機構で説明をつけることができる.

(A, B)=(フェルミ粒子, ボゾン粒子) のとき, ボゾン粒子が相互作用を起こった後も対消滅しなかったら, 可逆的な相互作用が起こることによって, 相互作用が効果的に起こらないことになる. 一方で, フェルミ粒子もすぐに対消滅すれば, 現在のような世界が存在しないことになる. 以下では, フェルミ粒子は比較的, 安定的に存在し, ボゾン粒子は仮想粒子として相互作用が起こるとすぐに対消滅して消えてなくなることをスピン量子数の違いから考察する.

2. スピン量子数

ボゾン粒子のスピン量子数は整数であり, フェルミ粒子のスピン量子数は半整数になることが場の量子論から導かれる. そもそも電子のスピン量子数などは角運動量として計算されるにもかかわらず, 実際の自転ではなく, 電子の内部構造に起因するものとされてきた. ここでは [M] で述べた相対性理論を使った議論を深化させて, スピンを自転によるものとして捉え, さらに上の節で述べたように, ボゾン粒子とフェルミ粒子のスピン量子数の違いについて論じたい.

2.1. スピンと自転. 自由電子からさまざまな速度 (運動量) で動いている慣性系ごとに各々の世界が広がっており, シュレーディンガー方程式から得られる場の演算子の運動量展開はこの各々の世界からの寄与を足し合わせて, 1 粒子の消滅・生成が行われていると数学的には解釈できるということが [M] における主張であった. さまざまな速度 (運動量) で動いている慣性系ごとに各々の世界が広がっているのは, 光速度不変の原理からの帰結であった.

さらに, 光子はスピン量子数 1 をもっていることを考慮するとこれらの世界は単に直線的に存在しているのではなく, 直進的かつ回転的に存在することになる. これらの世界からの寄与を足し合わせて電子が波動をなすことによって, 電子のスピンが与えられるのである. つまり, 電子そのものが自転しているわけではなく, 空間の方が光子のスピンとともに自転しているのである.

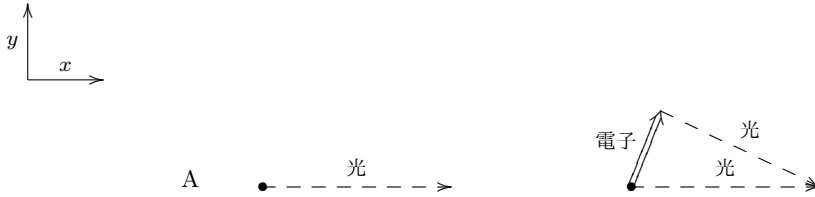
2.2. ボゾン粒子とフェルミ粒子のスピンの違い. ボゾン粒子のスピン量子数が整数なのに対して, フェルミ粒子のスピン量子数は半整数という不可解なものであ

る. また, はじめの節で述べたように, 現在の世界ではフェルミ粒子は比較的, 安定に存在し, ボゾン粒子は仮想粒子として相互作用が起こるとすぐに対消滅して消えてなくなる.

2.2.1. 光速不変の原理. まずは, [M] で述べた光速不変の原理についての考察を相対論的效果をもつ電子に対して応用したものを再掲しておく.



上の図のように, 地面に静止した点 A から出た光も, 地面に対して運動量 \mathbf{p} で移動している電子から出た光も, 地面に静止した観測者からすれば, ともに光速 c で進んでいるように見え, 速度 (ベクトル) の合成に関する公式が成立しない. これを光の性質と決め込むのも一つの考えかもしれないが, 次のように, 速度 (ベクトル) の合成に関する公式が成立するような仮想的な空間を数学的に設定したい.



つまり, ここで, 地面に静止した観測者は x 座標だけの様子を観測することになり, 目に見えない数学的仮想の世界が広がっているとして, 速度 (ベクトル) の合成を計算しているのである. 電子がいかなる運動量 \mathbf{p} で移動しても, 地面に静止した観測者からは電子から出た光は常に光速 c で進んでいるように見え, 当然のことながら, 電子の速度が速ければ速いほど, それだけの速度が y 座標の方向に消滅して, 点 A からの観測には寄与しなくなるといえる.

2.2.2. Dirac 場の運動量展開. 次に, 質量 m をもつ電子が満たす Dirac 場の共役 $\bar{\psi}(x)$ の運動量展開を表示すると次のようになる

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \cdot 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [c^\dagger(\mathbf{p}, s)\bar{u}(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot x} + d(\mathbf{p}, s)\bar{v}(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot x}].$$

ここで, $c^{(\dagger)}(\mathbf{p}, s), d^{(\dagger)}(\mathbf{p}, s)$ はそれぞれ粒子・反粒子についての生成・消滅演算子を表し, s はスピン, $\bar{u}(\mathbf{p}, s), \bar{v}(\mathbf{p}, s)$ は係数となるスピノルである. さまざまな速度 (運動量) で動いている慣性系ごとに各々の世界が広がっており, この運動量展開から分かるように運動量 \mathbf{p} からの寄与は

$$\frac{1}{(2\pi)^3 \cdot 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [c^\dagger(\mathbf{p}, s)\bar{u}(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot x} + d(\mathbf{p}, s)\bar{v}(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot x}]$$

となる. この表示と小節 2.2.1 での考察とをあわせると運動量 \mathbf{p} をもった電子の生成に対して, それに対応して運動量 \mathbf{p} をもった反粒子が 2.2.1 で設定した仮想的な y 座標方向に生成されていると解釈することができる.

2.2.3. スピン量子数. 上の考察から粒子の存在と仮想的な世界での反粒子の存在の度合によって, フェルミ粒子のスピン量子数が半整数になることはスピンの回転によるものとしても成立し得ることになる. 一方で, ボゾン粒子に対しても同様にして, 場の運動量展開が存在し, ボゾン粒子とフェルミ粒子のスピン量子数の違いは粒子の存在と仮想的な世界での反粒子の存在の度合によって異なることになる. 仮想粒子としてボゾン粒子が不安定なのはこの反粒子との対消滅によるものであり, フェルミ粒子との安定の差もこの度合に依存すると言える.

REFERENCES

- [M] K. Morita.: *On the mathematical interpretation of the quantum field theory.* (available at <https://kazuma-morita.jimdofree.com/>)